Глава 2

КОНЬ-ХАМЕЛЕОН

Не обязательно быть шахматистом, чтобы знать, какая фигура самая удивительная. Конечно, это конь! Не случайно выражение «ход конем» давно стало крылатым. Символизируя хитрость, ловкость и изобретательность, оно прочно вошло в наш быт. А гроссмейстер-остроумец Савелий Тартаковер вообще считал, что «вся шахматная партия – это один замаскированный ход конем». Поэтому рассказ о головоломках с участием фигур мы начинаем с коня.

От других фигур конь прежде всего отличается тем, что, перемещаясь по доске, он каждым своим ходом меняет цвет поля, на котором стоит. Поэтому в заголовке главы мы и назвали его хамелеоном. Многие задачи и головоломки про коня решаются очень эффектно, если воспользоваться этим свойством, характерным только для него.

Может ли конь добраться из угла доски до противоположного, посетив каждое ее поле ровно один раз?

Конечно, нет. Пусть исходное поле – a1. Оно черное, и на каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле. Значит, заканчивает свой путь на 63-м ходу он на белом поле. Но противоположный угол тоже черный – противоречие. В данном случае всё оказалось просто, но любопытно, что за доской шахматист нередко сталкивается с подобными вопросами.

На рис. 20 белые добиваются ничьей единственным способом – **1. ♔c1!** Теперь их король переступает с c1 на c2 и обратно, тем самым занимая каждый раз поле того же цвета, что и конь, и не выпуская черного короля из угла. А в случае 1. ♔c2? конь попадает на d3 при неприятельском короле на c2, тот вынужден взять коня или отступить, и пешка проходит в ферзи. Аналогия между этим шахматным примером и предыдущей головоломкой очевидна.

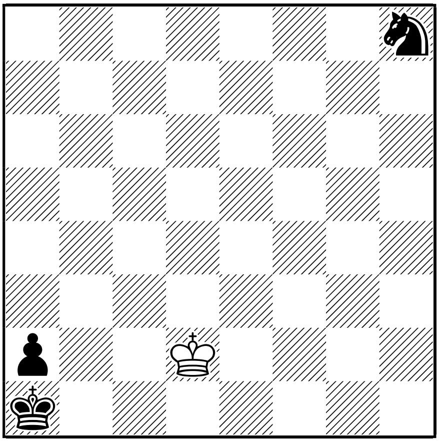


Рис. 20. Ничья.

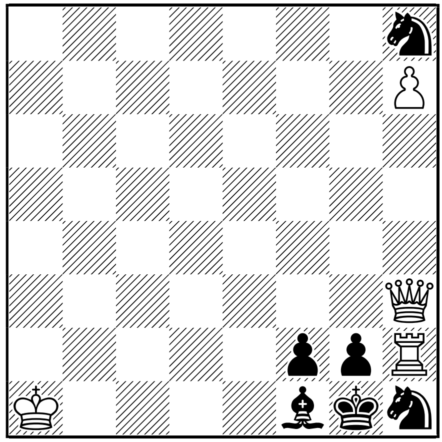


Рис. 21. Выигрыш.

Рассмотрим этюд В. Чеховера на рис. 21, где тоже требуется перехитрить коня-хамелеона.

В правом нижнем углу столпившиеся фигуры не могут двигаться, то есть находятся во взаимном цугцванге. Например, если ферзь уйдет с h3, то либо будет потеряна ладья, либо отступит черный слон с неизбежным f2-f1♕. С другой стороны, сейчас любой ход слона f1 ведет к мату в один ход, а коня h1 – к его потере и быстрой гибели черных, и, значит, они могут ходить только конем h8. Итак, белый король должен подойти к этому коню и забрать его. Двигаться он может только по черным полям, так как на белом получает шах слоном с превращением пешки «f».

Однако прямолинейное движение короля не дает результата: 1. ♔b2 ♘f7 2. ♔c3 ♘h8 3. ♔d4 ♘f7 (прикрывая поле e5) 4. ♔e3 ♘h8 5. ♔f4 (на 5. ♕h4 ♗d3 6. ♖:h1+ черные играют не 6...gh♕ 7. ♕:f2X, а 6...gh♘!) 5...♘f7! (охраняя поля e5 и g5) 6. ♔e3 ♘h8 7. ♔d4 ♘f7 8. ♔c5 ♘h8 9. ♔d6 ♘g6!

Итак, конь держит все поля вторжения. Чтобы все-таки прорваться к полю h8, белому королю нужно изменить соответствие цветов между ним и конем h8. Этого можно достичь, встав один раз королем на белое поле. Искомым является поле a8 – единственное недоступное черному слону.

Раскрыв секрет позиции, уже нетрудно найти решение: **1-6. ♔b2-c3-d4-c5-b6-a7** (черный конь перемещается с h8 на g6 и обратно) **7. ♔a8! ♘g6 8. ♔b8 ♘h8 9. ♔c7 ♘f7!** Неожиданно конь опять создал барьер для короля, но это лишь временное препятствие. **10-13. ♔b6-c5-d4-e5 ♘g6+ 14. ♔f6 ♘h8 15. ♔g7 ♘g6 16. h8♕.** После 16. ♔:g6 ♗d3+ вся работа белых пошла бы насмарку. **16...♘:h8 17. ♔:h8 ♘g3 18. ♕:g3 ♗d3 19. ♕:g2X.** Как видите, решение содержит и геометрический мотив: стартовав в одном углу доски, белый король, прежде чем добиться цели, побывал еще в двух!

За какое наименьшее число ходов с поля a1 конь доберется до h8?

И здесь коню надо пройти из одного угла доски в другой, но посещать все поля уже необязательно. Кратчайший путь составляет шесть ходов. Убедимся в этом. Коню нужно сделать в общей сложности 14 смещений по горизонтали и вертикали. За каждый ход он делает их три, значит, всего понадобится не меньше пяти ходов. Однако с черного поля за нечетное число конь попадает только на белое. Шестиходовый путь прост: ♘a1-c2-d4-f3-g5-f7-h8.

В нашей книге много внимания уделяется задачам о путешествиях фигур по шахматной доске. Перемещение той или иной фигуры между двумя полями мы называем путем этой фигуры. А путь, который проходит через все поля доски (слона – через все одноцветные поля) называем маршрутом. Обычно предполагается, что дальнобойная фигура (ферзь, ладья, слон) в своем маршруте не останавливается на каждом промежуточном поле, а через какие-то лишь пробегает (может быть, по несколько раз). Конечно, понятия пути и маршрута довольно условны, в конкретных случаях всегда понятно, что имеется в виду.

Маршрут фигуры называется *замкнутым*, если, обойдя всю доску, она очередным ходом возвращается на первоначальное поле, и *открытым*, если старт и финиш не связаны между собой ее ходом.

Любому пути или маршруту фигуры по доске соответствует график, который получается в результате последовательного соединения прямолинейными отрезками центров полей. Часто изображаются графики путей и маршрутов фигур, иногда они имеют довольно забавный, причудливый вид.

Ниже используется также математическое понятие *граф*. Геометрически граф можно определить как множество точек – вершин графа, соединенных линиями – ребрами графа. Если ребра имеют направление (ориентацию), то говорят, что граф ориентированный.

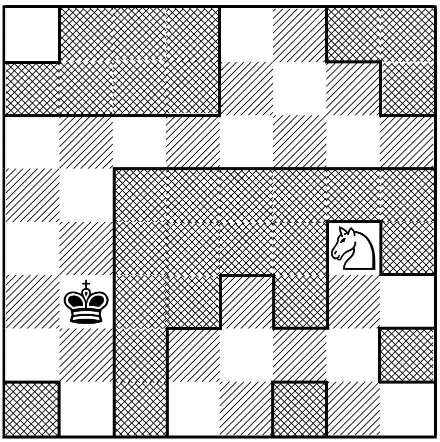
Каждой фигуре можно поставить в соответствие граф, вершины которого отвечают определенным полям доски (быть может, всем). Вершины соединяются ребром в том случае, если между полями, которым они соответствуют, возможен ход данной фигуры. Если те или иные поля доски в данной задаче несущественны, то помещать в них вершины графа необязательно.

Перемещению фигуры по доске соответствует некоторый путь или маршрут в графе, и наоборот. Таким образом, можно сказать, что график иллюстрирует конкретное перемещение фигуры по доске, а граф отражает совокупность всех ее возможных ходов.

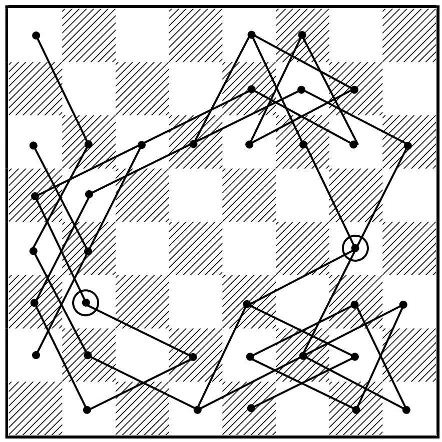
В книге рассматриваются задачи о путях и маршрутах для каждой из фигур. При этом встречается не только стандартная доска, но и различные прямоугольные доски mxn, в том числе квадратная nxn. Из следующей главы мы, например, узнаем, что конь в состоянии обойти квадратную доску nxn при любом $n \geq 5$, посетив все ее поля по одному разу (задача о ходе коня).

ЗАДАЧА О КОНЕ АТТИЛЫ. На доске две фигуры – белый конь и черный король. Некоторые поля доски «горящие». Конь должен дойти до неприятельского короля, повергнуть его и вернуться на исходное поле. При этом ему запрещено занимать как горящие поля, так и уже пройденные.

«Трава не растет там, где ступил мой конь!» – похвалялся вождь гуннов Аттила, намекая, что предводительствуемые им полчища уничтожают всё живое на своем пути.



а



б

Рис. 22. Конь Аттилы.

На рис. 22, а конь Аттилы расположен на g4, а неприятельский король – на b3, горящие поля заштрихованы.

Соединяя центры полей, между которыми возможен ход конем, получаем граф для данной задачи (рис. 22, б). В результате дело сводится к нахождению в этом графе такого пути, который не содержит ни одной вершины более одного раза и, кроме того, проходит через обе выделенные.

Методы решения подобных задач, называемых *лабиринтными*, хорошо известны. Впрочем, для коня Аттилы искомый путь нетрудно найти и непосредственно, он содержит 18 ходов: ♘g4-f6-e8-g7-e6-f8-g6-e7-c6-a5:b3-d2-b1-a3-b5-d6-f7-h6-g4. Для достижения цели коню пришлось побывать на 18 полях из 35, не сожженных в начале сражения.

Введем еще одно понятие. Путь (маршрут) фигуры на доске называется несамопересекающимся, если его график не имеет самопересечений.

Сколько ходов содержит самый длинный несамопересекающийся путь коня на шахматной доске?

Искомый путь состоит из 35 ходов (рис. 23, е). Любопытно, что сначала он был обнаружен компьютером. Головоломка была исследована вдоль и попе-

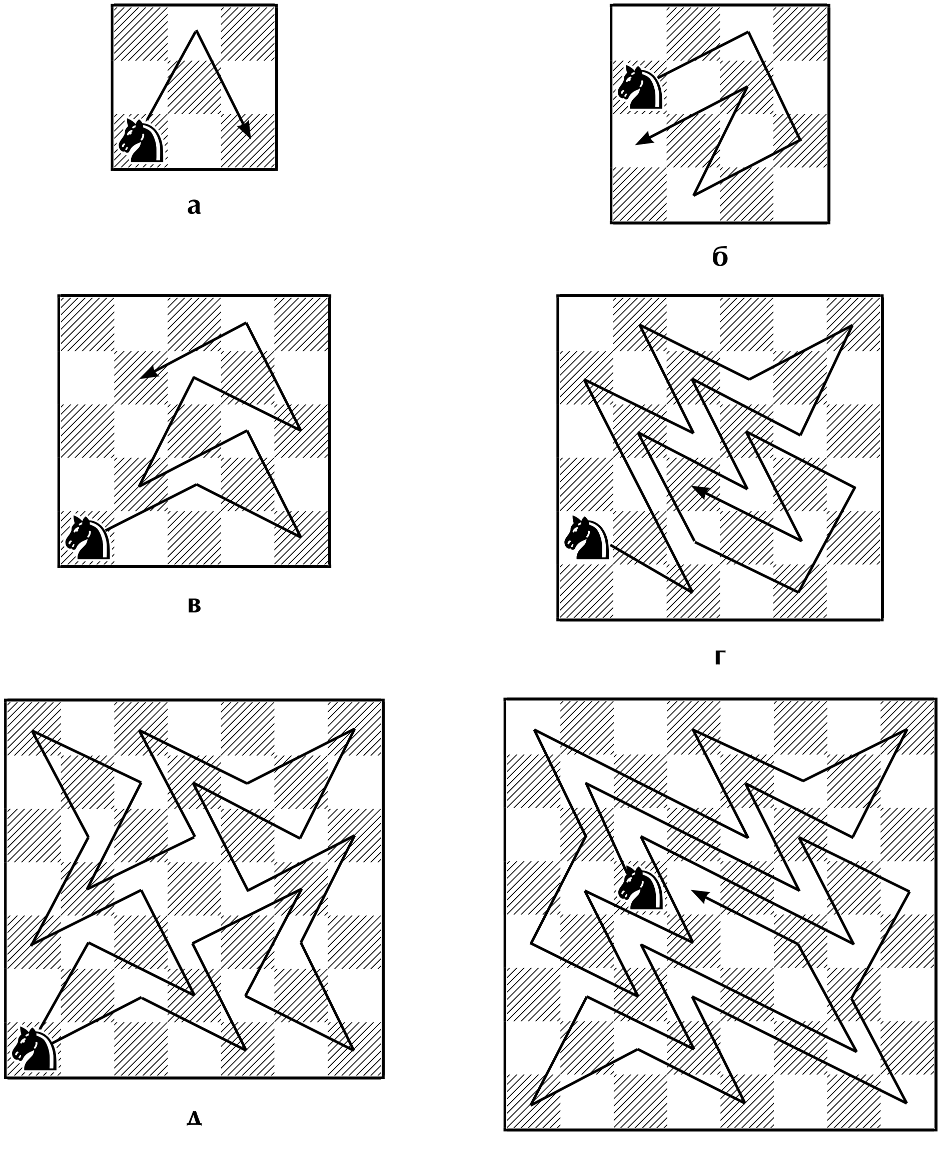


Рис. 23. Несамопересекающиеся пути коня.

рек для различных прямоугольных досок *m*x*n*, и установлены соответствующие рекорды. На рис. 23 показаны несамопересекающиеся пути наибольшей длины для досок *n*x*n* при *n* от 3 до 8. На доске 6x6 ни один человек не сумел найти путь длиной более 16 ходов. И тут постарался компьютер – нарисовал 17-ходовый путь коня без самопересечений (рис. 23, г). Любопытно, что только на доске 7x7 самый длинный путь замкнут (рис. 23, д).

На скольких полях бесконечной доски может оказаться конь за k ходов, начиная свой путь с заданного поля?

Обозначим искомое число полей через $N(k)$. Легко проверить, что $N(1) = 8$, $N(2) = 33$. За три хода (k=3) конь с исходного черного поля попадает на все 76 белых полей восьмиугольника с центром в этом поле (рис. 24). Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любом $k \geq 3$ поля, которые достигает конь, полностью заполняют соответствующий восьмиугольник: все его черные поля при четном k и белые – при нечетном. Подсчитав число одноцветных полей в нем, получаем: $N(k) = 7k^2+4k+1$.

Для других фигур эта задача не представляет интереса. Король за k ходов попадает на любое поле квадрата $(2k+1)$x$(2k+1)$ с центром в исходном поле. Дальнобойные фигуры уже за один ход могут оказаться на бесконечном числе полей, при этом ферзь и ладья за два хода достигают любого поля бесконечной доски, а слон – любого поля того же цвета, что исходное.

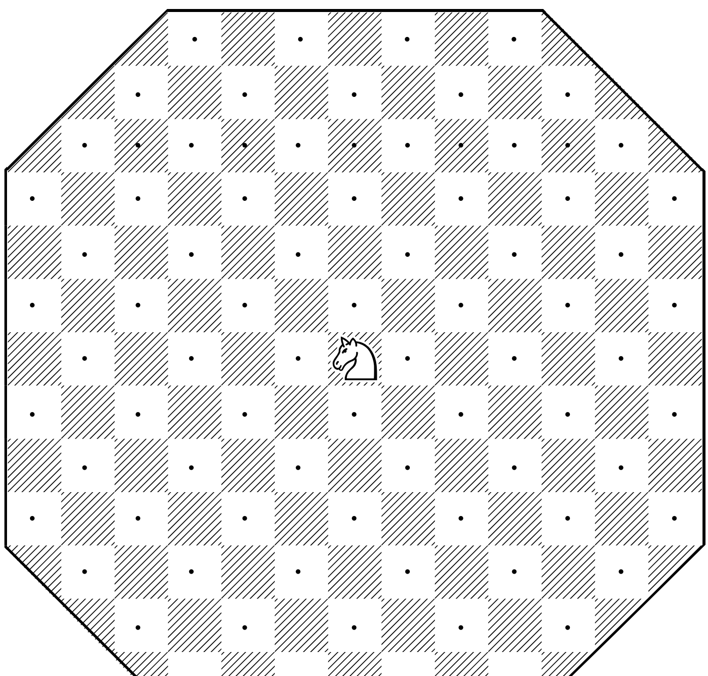


Рис. 24. Куда попадет конь?

Конь сделал восемь ходов и вернулся на исходное поле доски. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях доски?

Предположим, что конь посетил все линии. Так как маршрут замкнут, точкой отсчета можно считать поле нижней горизонтали. Рано или поздно конь оказывается на последней горизонтали, то есть смещается по вертикали на семь полей. Поскольку он возвращается на место, общее число перемещений по вертикали не менее 7+7=14. Аналогично и общее число перемещений по горизонтали не менее 14. Значит, всего перемещений не меньше 28. На каждом ходу смещение составляет 1+2 = 3 поля. За 8 ходов число смещений коня не превысит 3х8=24. Противоречие: 24 < 28.

На бесконечной доске расставлены пешки через три поля на четвертое (рис. 25). Существует ли для коня способ обхода всех свободных полей такой доски с посещением каждого из них по одному разу?

Предположим, что искомый способ существует. Рассмотрим два квадрата: 196х196 и концентрично окаймляющий его 200х200. При указанной расстановке пешек все они стоят на полях одного цвета, например, белого (рис. 25) – в количестве 2500 на доске 200х200. С каждого из $196^2/2=19208$ черных полей внутреннего квадрата конь попадает на одно из $200^2/2-2500=17500$ свободных белых полей окаймляющего. Так как 17500<19208, то на некоторые белые поля конь встанет более одного раза – противоречие.

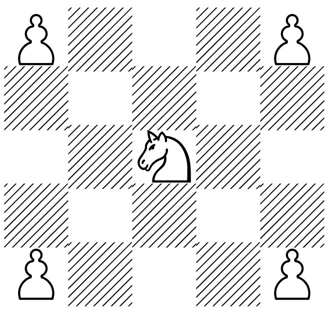


Рис. 25. Конь на бесконечной доске.

Группу коней на бесконечной доске назовем *эскадроном*, если все вместе они могут сделать произвольное число ходов, не оставляя ни одного из них без защиты. Эскадрон – активный, если при таком дружном передвижении он может добраться до любого поля доски.

Из какого наименьшего числа коней может состоять активный эскадрон?

Один или два коня вообще не образуют эскадрон, из трех и четырех сформировать его можно, но он будет перемещаться на ограниченной территории. Наименьшее число коней в активном эскадроне равно пяти. На рис. 26 показано, как пятерка коней из положения 1 попадает в положения 5 и 11. В первом случае из 1 получаем 2, затем 3, 4 и 5. Во втором из 4 получаем 6 и далее 7, ..., 11 (кони постоянно поддерживают друг друга). Положения 1 и 11 отличаются сдвигом по вертикали на одно поле, а положения 1 и 5 – сдвигом по горизонтали и вертикали на одно поле (они также перевернуты на 180^0). Таким образом, эскадрон может переместиться на любое число полей по вертикали и горизонтали и, значит, является активным.

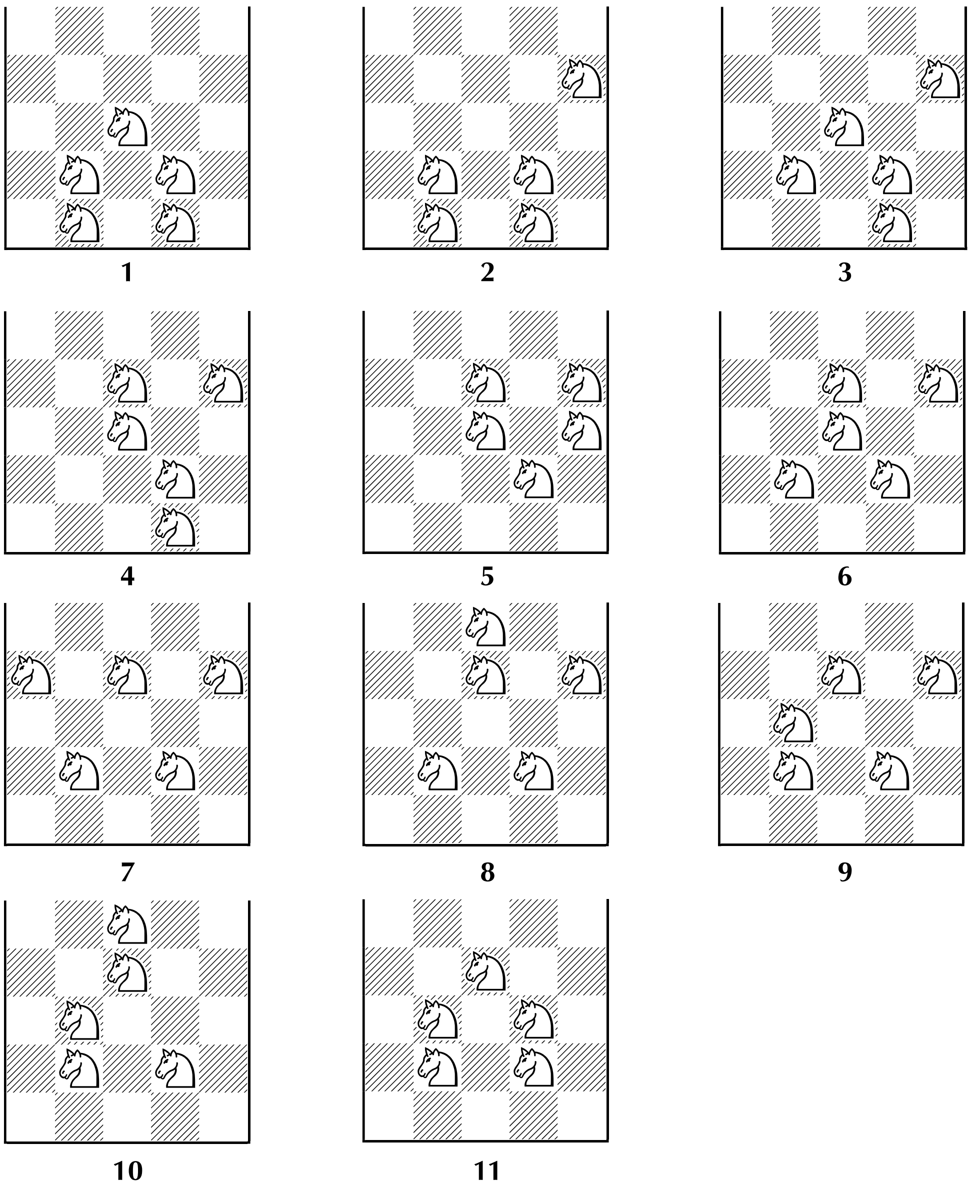


Рис. 26. Эскадрон коней.

На доске 8x8 расставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Доказать, что можно поставить еще одного коня, – и снова фигуры не будут под боем.

Рассмотрим 12 полей, отмеченных точками на рис. 27. Конь может находиться на одном из них или нападать на одно из них, но не может делать то и другое одновременно. Не может он и атаковать более чем одно из отмеченных

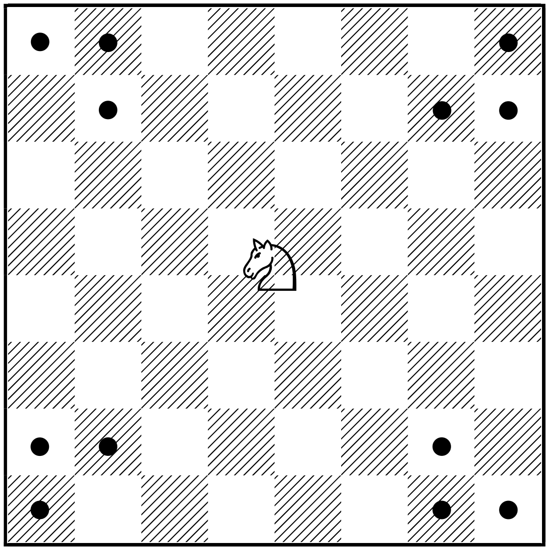
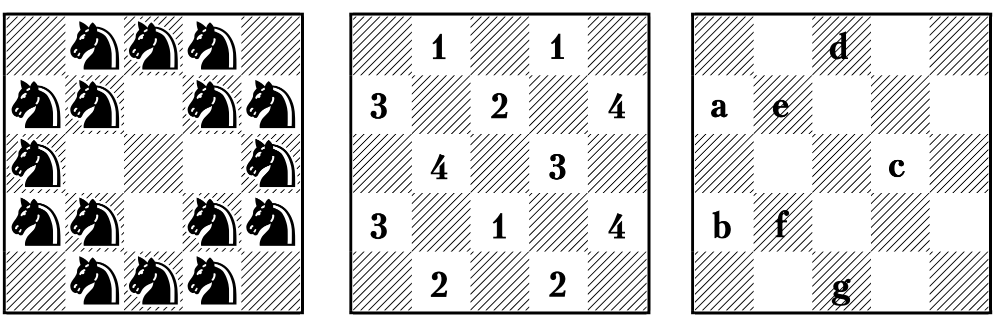


Рис. 27. Сколько можно поставить коней?

полей. Поэтому среди них найдется хотя бы одно поле, на котором нет коня и которое не бьется ни одним из одиннадцати. На него и следует поставить еще одного коня.

Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5x5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

На рис. 28, а 16 коней удовлетворяют условию. Докажем, что больше расставить нельзя. Прежде всего убедимся, что при любой расстановке на черных и белых полях коней поровну. Действительно, если соединить отрезками бью-



а б в

Рис. 28. Каждый конь бьет двух других.

щих друг друга коней, то из каждого поля выйдут два отрезка, соединяющие поля разного цвета. Значит, общее число отрезков равно, с одной стороны, удвоенному числу коней на белых полях, а с другой, удвоенному числу коней на черных полях, то есть число коней на полях обоих цветов одинаковое.

Белых полей у нас 12, а черных – 13. Пусть t – число пустых белых полей, тогда число пустых черных – $t+1$. При любом необходимом расположении центральное поле пустое. В противном случае, из восьми полей, которые конь бьет с него, ровно шесть пустых белых, $t \geq 6$, и число коней не превосходит $25 - 6 - (6+1) = 12$, а на рис. 28, а их уже на 4 больше.

Теперь разобьем белые поля на четыре группы, как показано на рис. 28, б (у полей одной группы одинаковые цифры). При нужном расположении по крайней мере одно поле каждой группы пустое. Предположим противное, пусть, например, на всех полях группы 3 стоят кони a, b и c (рис. 28, в). С поля a конь нападает на поля f, d и центральное. Но центральное пусто, значит, на f и d стоят кони. В этом случае конь с поля c бьет четырех коней d, e, f и g, что противоречит условию. Итак, число пустых белых полей $t \geq 4$. Отсюда число коней не больше $25 - t - (t+1) = 24 - 2t \leq 16$.

Для какого наибольшего числа k можно расставить коней на доске 8x8 так, чтобы каждый из них нападал ровно на k других?

Рассмотрим произвольную расстановку коней, удовлетворяющую условию задачи. Возьмем коня, расположенного на горизонтали, ограничивающей конфигурацию на доске сверху. Тогда он может нападать самое большее на четырех коней. Осталось привести положение, в котором каждый конь бьет ровно четырех других. Оно показано на рис. 29.

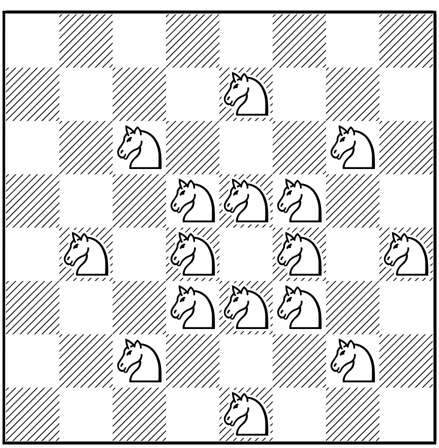


Рис. 29.
Каждый конь бьет четырех других.

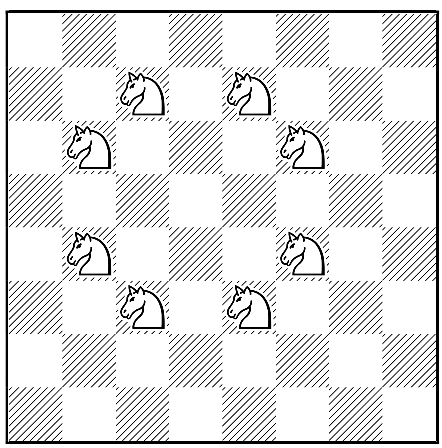


Рис. 30. Между конями два хода.

Какое наибольшее число полей можно отметить на доске 8х8 так, чтобы с любого из них конь добирался до любого другого за два хода?

Таких полей 8, например, на рис. 30 на них стоят кони. Самое левое поле отстоит от самого правого на два хода, как и самое верхнее от самого нижнего. Из этого следует, что все поля находятся внутри квадрата 5х5 и их не больше восьми.

Рассказ о коне, самой хитрой фигуре на шахматной доске, мы продолжим в следующей главе.

Глава 3

ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНЯ

Эта глава посвящена самой известной, можно сказать, классической задаче о коне, да и во всей шахматной математике тоже.

ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНЯ. ***Обойти конем все поля доски, посетив каждое из них по одному разу.***

Особая популярность этой головоломки объясняется тем, что в XУIII и XIX веках ею увлекались многие знаменитые математики, в том числе великий Леонард Эйлер, который в 1749 году посвятил ей большой трактат «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не поддается никакому исследованию». Хотя задача была известна до Эйлера, именно он впервые обратил внимание на ее математическую сущность, и поэтому ее часто связывают с его именем.

Значительно сложнее проблема, состоящая не в нахождении определенного маршрута коня по доске, а в поиске всех маршрутов и подсчете их числа. Увы, эта задача не решена до сих пор, и, похоже, шансов на успех немного (что, видимо, и имел в виду Эйлер в своем труде). Доказано только, что число искомых маршрутов не больше $C_{168}{}^{63}$ (число сочетаний из 168 элементов по 63), но превосходит 30 миллионов.

Математик Ф. Миндинг, подошедший к проблеме с алгебраической точки зрения, предложил метод, позволяющий вывести формулу для числа всех решений, однако вычисления, которые следует при этом произвести, практически неосуществимы.

Литература, посвященная задаче о ходе коня, весьма обширна. Придумано много методов нахождения тех или иных маршрутов по всей доске, часто они носят имена их первооткрывателей – метод Эйлера и Вандермонда, рамочный метод Мунка и Коллини, метод деления на четверти Полиньяка и Роже и другие.

Как уже говорилось в предыдущей главе, маршрут коня замкнутый, если с конечного поля конь в один ход возвращается на исходное. Графически такой маршрут представляет собой замкнутую линию, причем любое поле доски можно считать началом и концом маршрута. Если же старт и финиш не связаны между собой ходом коня, то маршрут открытый.

Остановимся теперь на некоторых наиболее популярных методах нахождения маршрутов коня.

Рамочный метод Мунка и Коллини (Коллини – секретарь великого философа Вольтера). Шахматную доску разделим на две части: внутреннюю из 16 полей и внешнюю, имеющую форму рамы и состоящую из 48 полей (рис. 31). На полях внутреннего квадрата запишем заглавные буквы *A, B, C, D* так, чтобы каждая из них, повторенная четыре раза, образовала квадрат или ромб, по всем сторонам которого может пройти конь. Те же буквы, только строчные, запишем в рамочных полях, чтобы ходы коня по каждой из них образовывали замкнутые многоугольники, окаймляющие центральный квадрат. Конь начинает свой маршрут от какого-нибудь рамочного поля, проходит вдоль рамы по выбранной букве, например *a,* и за 11 ходов исчерпывает ее (последнее поле не должно быть угловым). Затем он переходит во внутренний квадрат, но не на букву *A*, а на любую другую. Пройдя все поля, помеченные ею, конь снова возвращается на раму – на букву, по которой еще не ходил, и вновь обегает квадрат, исчерпывая вторую букву, и т. д., пока не пройдет по всей доске.

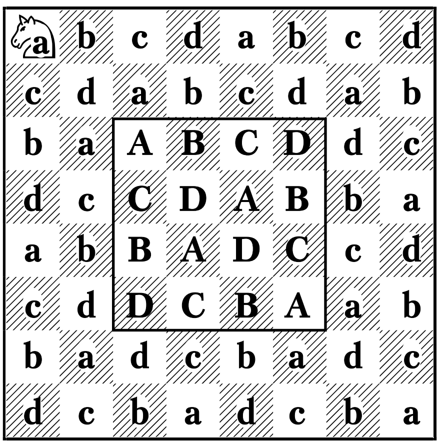


Рис. 31. Метод Мунка и Коллини.

Метод Полиньяка и Роже – деление на четверти. Этот метод проще предыдущего, хотя и похож на него. Разделим доску крестом на четыре квадрата (рис. 32). В каждом их них

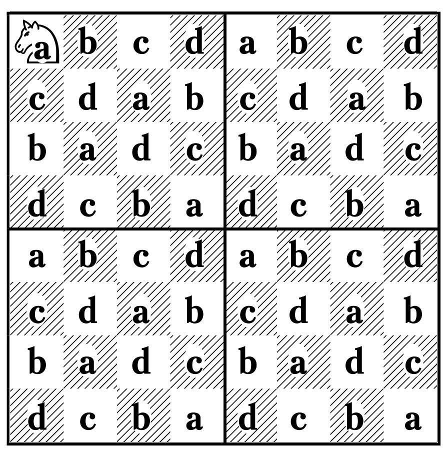


Рис. 32. Метод Полиньяка и Роже.

расставим буквы *a, b, c, d* точно так же, как во внутреннем квадрате на рис. 36. Конь начинает движение с любой буквы, проходит в выбранном квадрате по всем четырем полям с ней, затем переходит на ту же букву соседнего квадрата, и т. д. Исчерпав все 16 полей с одной буквой, он меняет ее и снова зигзагом обегает доску. После четырех таких кругов все поля будут пройдены (как и в предыдущем методе, «круговые» маневры не должны заканчиваться на угловом поле).

Поля в маршрутах и путях коня удобно нумеровать числами 1, 2, 3,... в соответствии с порядком их посещения. В маршруте коня по всей доске начальное поле имеет номер 1, а конечное – 64. Разумеется, изменив направление маршрута на противоположное, всегда можно поменять между собой начало и конец. Очевидно, если маршрут замкнут, поля 1 и 64 связаны ходом коня. Поскольку цвет полей на каждом ходу меняется, все нечетные поля в маршруте одного цвета, а четные – другого.

Метод Эйлера и Вандермонда. В отличие от предыдущих, этот метод позволяет получать самые разнообразные маршруты коня. В его основе лежит возможность замены обратными всех ходов, начиная с поля, связанного с конечным. В качестве примера рассмотрим маршрут на рис. 33, а. Используя связь поля 31 с конечным 64, получим еще один маршрут. Оставим все числа 1, 2, ..., 31 на своих местах, а числа 32, 33, ..., 64 заменим соответственно на 64, 63, ..., 32. Иначе говоря, один последовательный путь (от 32 до 64) мы заменяем другим, обратным (от 64 до 32). Теперь поле h4, поменявшее номер 32 на 64, стало конечным. Новый маршрут в старой нумерации полей можно записать так: от 1 до 31, ход 31-64, от 64 до 32.

Указанный прием можно повторять многократно, получая всё новые и новые маршруты. В исходном маршруте поле 49 также связано с 64, что дает нам

7	24	53	36	5	22	51	34
54	37	6	23	52	35	4	21
25	8	55	58	45	12	33	50
38	59	46	13	48	57	20	3
9	26	15	56	11	44	49	32
60	39	10	47	14	31	2	19
27	16	41	62	29	18	43	64
40	61	28	17	42	63	30	1

а

7	18	47	30	5	16	45	28
48	31	6	17	46	29	4	15
19	8	49	52	39	60	27	44
32	53	40	59	42	51	14	3
9	20	a	50	61	38	43	26
54	33	62	41	58	25	2	13
21	10	35	56	23	12	37	b
34	55	22	11	36	57	24	1

б

Рис. 33. Метод Эйлера и Вандермонда.